

KANT SOBRE EL CONTAR Y LOS JUICIOS ARITMÉTICOS ELEMENTALES

Kant on the counting and the elementary arithmetical judgments

Pedro A. Viñuela Villa*

Resumen

En numerosos pasajes de su obra crítica, Kant intenta defender e ilustrar su tesis de que los juicios aritméticos elementales son sintéticos *a priori*, recurriendo a ejemplos tomados de prácticas básicas de cálculo. De ellos, contar con los dedos no ha recibido suficiente atención ni ha sido adecuadamente interpretado. En cuanto gesto convencional, sin embargo, pone de manifiesto aspectos importantes sobre la concepción kantiana de la aritmética. El presente artículo pretende arrojar algo de luz sobre la dimensión corporal, cinética e intuitiva de tal modo de contar, con el fin de lograr una mejor comprensión de la visión kantiana crítica de la matemática y de su defensa del carácter sintético *a priori* de los juicios numéricos.

Palabras clave: aritmética, contar, gestos, juicios sintéticos *a priori*, número.

Abstract

In many places of his critical work Kant tries to defend and illustrate the thesis that elementary arithmetical judgments are synthetic *a priori*, using examples from basic practices of calculation. Counting on fingers, as one of such examples, has received neither enough attention nor an appropriate interpretation. As a conventional gesture, however, it reveals some relevant aspects on the Kantian conception of arithmetic. This paper is intended to shed some light into the bodily, kinetic, and intuitive dimension of such a kind of counting, in order to understand the Kantian mature view on mathematics and his defense of the synthetic *a priori* nature of numerical judgments.

Keywords: arithmetic, counting, gestures, number, synthetic *a priori* judgments.

* Pedro Viñuela V. es Doctor en Filosofía, Ingeniero Civil de Industrias con mención Electricidad y Licenciado en Ciencias de la Ingeniería, por la Pontificia Universidad Católica de Chile. Es también Licenciado en Filosofía por la Universidad de Chile. En la actualidad se desempeña como Profesor Asociado en la Universidad Internacional de La Rioja (España). Contacto: p.vinuela.v@gmail.com

I

Para explicar e ilustrar la tesis crítica de que las proposiciones propiamente matemáticas son todas sintéticas *a priori*, Kant usa ejemplos tomados de la geometría y la aritmética elementales. Algunos de estos ejemplos se han tornado célebres. Así, para argumentar el carácter sintético de los juicios aritméticos, hace referencia a la fórmula numérica elemental $7+5=12$, con el fin de mostrar que es imprescindible acudir a la intuición. Esto es así, según Kant, porque “todo nuestro conocimiento se refiere, en última instancia, a intuiciones posibles; pues sólo mediante ellas es dado un objeto” (A 719/B 747).¹ La matemática no es una excepción, sólo que en ella se necesita una intuición no empírica para poder fundamentar *a priori* los juicios. De acuerdo a la *Crítica de la razón pura* (KrV), ninguna intuición es dada *a priori*, salvo la mera forma de los fenómenos, a saber: espacio y tiempo (cf. A 720/B 748). Éstos constituyen la forma pura de la intuición, lo no sensible de lo sensible, en lo cual y mediante lo cual es dado todo objeto de experiencia. En cuanto forma de la sensibilidad, la intuición puede ser conocida y determinada de manera completamente *a priori* (cf. A 723/B 751).

Kant sostiene que lo que define esencialmente a la matemática es que procede por construcción de conceptos en la intuición (cf. A 713/B 741). A su juicio, gracias a la noción de construcción, se ha podido distinguir por primera vez con exactitud el método peculiar y distintivo que la razón sigue en matemática (cf. Ak. VIII 191-192). La existencia de una intuición pura² hace posible la constructibilidad de los conceptos matemáticos y, por ende, que los juicios propiamente matemáticos sean sintéticos *a priori*. De este modo, debido a que está intrínsecamente ligada y dirigida a la intuición pura, sólo la matemática puede construir sus conceptos, es decir, exhibir *a priori* la intuición que les corresponde *in concreto*.

Ahora bien, en diversos pasajes de la KrV y de los *Prolegómenos*, Kant describe el procedimiento extraconceptual que fundamenta las proposiciones aritméticas elementales, afirmando que es necesario apoyarse en puntos, rayas o en los dedos de la mano para producir el resultado. Frege, aludiendo a dichas expresiones, ha sostenido que “Kant quiere tomar como ayuda la intuición de dedos o puntos, con lo cual corre el riesgo de hacer aparecer a estas proposiciones, en contra de su propia opinión, como empíricas; pues, en todo caso, la intuición de 37863 dedos no es una intuición pura” (Frege 1998, §5). Es difícil pensar, no obstante, que Kant pueda haber cometido semejante error de bulto sobre una cuestión tan importante para su argumentación crítica. De hecho, Kant insiste en que el propósito de esos ejemplos es mostrar, mediante el análisis del significado

¹ Cf. A 19/B 33. Para facilitar la remisión a las obras de Kant, a continuación de la abreviatura Ak., se indica el tomo en números romanos y, seguidamente, la página en números arábigos. La *Crítica de la razón pura* (KrV) se cita de la forma convencional: A refiere a la primera edición (1781) y B a la segunda (1787), acompañada del correspondiente número de página. La *Crítica de la facultad del juicio* se cita indicando, a continuación de la abreviatura KU, el parágrafo correspondiente. Las traducciones del alemán de los escritos de Kant son mías. Para citar *Die philosophische Schriften* de Leibniz se escribe la abreviatura GP, seguida del volumen en números romanos y la página en números arábigos. Las obras de Descartes se citan de la manera acostumbrada: después de la abreviatura AT (la edición de Adam y Tannery) se indica el tomo en números romanos y la página en números arábigos.

² Por intuición pura entiende Kant la forma pura de las intuiciones sensibles en general, en la cual todo lo múltiple de los fenómenos es intuitivo en ciertas relaciones. Esta forma pura de la sensibilidad se encuentra *a priori* en el ánimo (*Gemüth*) (cf. A 20-21/B 34-35).

operacional primario de las fórmulas numéricas básicas, que calcular las sumas, expresadas simbólicamente y estáticamente en las fórmulas, no es una cuestión de meros conceptos y, por tanto, de pura lógica. El número, asegura Kant, busca su soporte y sentido en los dedos (cf. A 240/B 299), en aquellos gestos especiales hechos al contar. Los pasajes en los cuales Kant ilustra y defiende de tal modo su posición respecto al carácter sintético y *a priori* de los juicios aritméticos, y que tanta sorpresa y sorna provocan en Frege, merecen ser tomados en serio.

El uso de los dedos de la mano para contar es un tipo de acción gestual peculiar. En la *Antropología en sentido pragmático* Kant incluye los signos gestuales dentro de los signos convencionales, junto a las cifras y a las letras del alfabeto. En este artículo pretendo mostrar que la referencia hecha por Kant a los signos gestuales digitales debería recibir mayor atención, debido a que pertenecen a una dimensión antropológico-corporal originaria. De este modo, por su importancia en la fundamentación de la aritmética elemental, su consideración puede resultar altamente instructiva para comprender la interpretación «operacional» que Kant hace de los juicios aritméticos, así como su argumentación de que tienen un carácter esencialmente sintético y *a priori*.

II

En el §39 de la *Antropología en sentido pragmático*, Kant presenta lo que podría calificarse como un «pequeño estudio semiótico». En dicho lugar clasifica los distintos tipos de signos, distinguiendo expresamente tres clases, a saber: signos naturales, signos de maravillas y signos voluntarios (cf. Ak. VII 192-195). Me concentraré en los signos voluntarios, porque son los que interesan en este artículo. Los signos voluntarios o arbitrarios (*willkürliche Zeichen*) constituyen signos artificiales o técnicos (*Kunstzeichen*), basados en una convención (*in arbitrio, in die Willkür*), a los cuales pertenecen (cf. *Antropología* §39, Ak. VII 192):

1. Los signos de los gestos (*Geberdung*), esto es, los signos mímicos.³
2. Los signos escritos, como las letras, que son signos para sonidos.
3. Los signos tonales (*Tonzeichen*), como las notas musicales (*Noten*).
4. Los signos convenidos entre individuos meramente para la vista, como las cifras (*Ziffern*).
5. Los signos de rango (*Standeszeichen*) de hombres libres, honrados con primacía hereditaria (blasones).
6. Los signos de servicio (*Dienstzeichen*) en vestidos legales (uniforme y librea).
7. Los signos de honor (*Ehrenzeichen*) del servicio (bandas de órdenes).
8. Los signos de deshonor o de vergüenza (*Schandzeichen*) (estigmas, etc.).⁴

Bajo la expresión signos arbitrarios, como se puede ver, Kant engloba una gran cantidad de signos que pertenecen a diversas actividades humanas. Es interesante observar que los signos gestuales, que ocupan el primer lugar de la lista, se encuentran junto a las letras del alfabeto (*Buchstaben*), en tanto que designan sonidos del lenguaje, y a los signos

³ Kant sostiene que en parte son también signos naturales.

⁴ Kant afirma que entre estos signos se pueden incluir en escritos los signos de suspensión, de interrogación o de afecto, y de admiración (la puntuación).

escritos usados en las notaciones de los sistemas numéricos (las cifras), signos que están dirigidos meramente *ad oculos*.

En la *Crítica de la facultad del juicio* (KU) también se encuentran referencias importantes a los signos gestuales. En el §59, consagrado a tratar el tema de la belleza como símbolo de la moralidad, Kant delimita el significado técnico de símbolo del de caracterismo⁵. Respecto a los caracterismos (*Charakterismen*), que son los que interesan aquí, Kant indica que constituyen “designaciones de conceptos mediante signos sensibles concomitantes”. Agrega que “no contienen nada que pertenezca a la intuición del objeto, sino que sólo sirven como medios de reproducción, de acuerdo a las leyes de asociación de la imaginación, por tanto en intención subjetiva”. Y concluye señalando que tales designaciones de conceptos son “o bien palabras, o bien signos visibles (algebraicos, incluso mímicos), como meras expresiones para conceptos” (KU §59, Ak. V 352).

Como puede apreciarse de los pasajes recién comentados, Kant incluye los signos gestuales, que en KU §59 denomina «signos mímicos», dentro de los signos arbitrarios y artificiales. Tales signos se caracterizan, en primer lugar, por ser visibles (*sichtbare Zeichen*), como los signos algebraicos, y por ser no auditivos, en contraste con las palabras; en segundo lugar, se caracterizan por ser signos no escritos, a diferencia de cifras y letras; en tercer lugar, se caracterizan por tener validez sólo para el sujeto epistémico (*in subjectiver Absicht*), no para el objeto; y, finalmente, se distinguen por constituir meras expresiones para conceptos (*bloße Ausdrücke für Begriffe*).

El caso de los sordos de nacimiento permite poner de manifiesto el carácter esencialmente visual de los signos gestuales, ya que, al carecer del sentido del oído, estas personas deben valerse de la vista para poder comunicarse. Para ello sustituyen los sonidos vocales por signos gestuales y por el sentimiento del movimiento de sus propios órganos del lenguaje⁶. Por otra parte, al ser signos no escritos, los signos gestuales son efímeros, dinámicos y cinéticos, mientras que los signos escritos, como letras y cifras, son duraderos, estáticos y no cinéticos. En efecto, por razones profundamente fisiológicas, y a diferencia de la escritura, tanto los mensajes hablados como los gestuales no pueden ser reprocesados y, por tanto, pertenecen al ámbito de los mensajes efímeros⁷. Además, como sostiene Harris, “la forma escrita como tal no tiene dimensión cinética, aunque su formación puede requerir movimientos entrenados de la pluma, pinceles, estilos, etc.; la forma gestual, por su parte, es intrínsecamente cinética” (Harris 1999, 62).

⁵ Símbolo es para Kant un cierto modo de representación de los conceptos de razón o ideas. En KU §59, Kant declara que no es posible exponer la realidad objetiva de los conceptos de razón, para su conocimiento teórico, ya que ninguna intuición puede adecuarse jamás a una idea. Los símbolos son, por ello, intuiciones que contienen presentaciones indirectas de los conceptos, exhibiéndolos mediante una analogía. El símbolo es, por tanto, una intuición analógica (*analogische Anschauung*) o una intuición indirecta (*indirecte Anschauung*). Véase *Reflexiones de lógica*, R. 3398 (Ak. XVI 814); *Reflexiones de antropología*, R. 1486 (Ak. XV 710); Caygill 1995, 66.

⁶ Como advierte Descartes en el *Discurso del método*, “los hombres, que son sordos y mudos, privados de los órganos que sirven a los otros [hombres] para hablar, acostumbran a inventar ellos mismos algunos signos [*quelques signes*], mediante los cuales se hacen entender a los que, estando ordinariamente con ellos, tienen tiempo de aprender su lenguaje” (AT VI 57-58). Los signos mímicos actúan para tales personas como «palabras no pronunciadas» manifestadas con los gestos de las manos (cf. Mosterín 2009, 203).

⁷ Esto ha cambiado, aunque sin alterar la naturaleza de la palabra y el gesto como tales, como consecuencia de la posibilidad de repetición de la señal que ofrecen las tecnologías de grabación y reproducción de audio y vídeo (cf. Harris 1999, 63).

Ahora bien, llegados a este punto, es preciso hacer la siguiente aclaración. Los gestos realizados con los dedos de la mano para contar no son exactamente de la misma índole que los gestos que se efectúan al hablar. Según Kant, existen tres modos de expresión usados por los hombres en el habla: la palabra (articulación), el gesto (gesticulación) y el tono (modulación), que se corresponden, respectivamente, con el pensamiento, la intuición y la sensación. La palabra es expresión de los pensamientos, mientras que el gesto está relacionado con la expresión de las intuiciones según la forma (cf. KU §51, Ak. V 320-321). Al modo gestual de expresión usado por los hombres al hablar, Kant lo llama, por tanto, gesticulación (*Gesticulation*). Entiende por tal aquellos movimientos de manos y gestos del rostro que acompañan al habla y que proporcionan expresión corporal a lo que se piensa y cómo se piensa (cf. KU §51, Ak. V 320-321, 324)⁸. Signos gestuales como el movimiento de los dedos para contar no constituyen signos idiosincrásicos como la gesticulación; antes bien, se trata de signos convencionales que expresan, exhiben y comunican corporalmente conceptos de números.

III

La acción de contar desempeña un papel fundamental en la concepción kantiana del número. Kant sostiene que el número, como esquema puro de la cantidad, es una representación que reúne y abarca la adición sucesiva de unidades homogéneas. El número no es más que la unidad de la síntesis de lo múltiple de una intuición homogénea en general (cf. A 142-143/B 182). En la acción de contar se genera el número entero, como conjunto (*Menge*) de unidades, mediante adición sucesiva (cf. A 103). Dedekind sustenta, en este respecto, una posición cercana a Kant en su ensayo *Continuidad y números irracionales*⁹:

Considero la aritmética entera como una consecuencia necesaria o, al menos, natural, del acto aritmético más simple, el de contar, y el contar mismo como nada más que la creación sucesiva de la serie infinita de los enteros positivos, en la cual cada individuo es definido por el que lo precede inmediatamente; el acto más simple es pasar de un individuo ya formado al nuevo individuo consecutivo a ser formado (Dedekind 1963, 4)¹⁰.

Todo número debe tener como fundamento la unidad (cf. A 171/B 212). En efecto, Kant dice que nuestro contar (*zählen*) es una síntesis de acuerdo a conceptos (*Synthesis nach Begriffen*), porque tiene lugar de acuerdo a un fundamento común de unidad, como la

⁸ Según Adam Kendon, gesticulación designa los movimientos de manos y brazos, además de los movimientos de los labios y la mandíbula, que generalmente son reconocidos como íntimamente relacionados con la actividad de hablar y que son considerados a menudo como parte del modo total de expresión del hablante (cf. Kendon 1980, 207).

⁹ *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, §1.

¹⁰ Esta posición, empero, debe ser contrastada con lo que Dedekind escribe en el prólogo a su ensayo *Was Sind und Was Sollen die Zahlen?*, en el que pretende derivar el concepto de número de leyes puramente lógicas: "Lo que es demostrable no debe aceptarse en ciencia sin demostración. Por evidente que parezca esta exigencia, según creo, no hay que considerarla satisfecha ni siquiera en la fundamentación de la ciencia más sencilla, aquella parte de la lógica que trata de la teoría de los números, ni aun en las exposiciones más recientes. Al decir que la aritmética (álgebra, análisis) es sólo una parte de la lógica, estoy manifestando ya que considero el concepto de número como algo completamente independiente de las representaciones o intuiciones del espacio y del tiempo, como algo que es más bien un resultado inmediato de las puras leyes del pensamiento" (Dedekind 2006, 785).

decena en el sistema numérico decimal (cf. A 78/B 104)¹¹. La acción de contar suministra como resultado el «cuántas veces» está contenida la unidad en el agregado de elementos homogéneos. Por tanto, Kant considera que la operación de contar constituye una acción originaria que se halla a la base de toda operación aritmética.

Sin embargo, Kant no ha sido el primero en reparar en la importancia del contar. En su escrito *La langue des calculs*, Condillac explica la formación de todas las especies de cálculo a partir de la observación del cómputo digital. A su juicio, “el cálculo con los dedos es el primer cálculo”, del mismo modo que “el lenguaje de acción constituye el primer lenguaje” (Condillac 1798, 10)¹². Existe cierto fundamento natural para esto, argumenta Condillac, porque “cuando la naturaleza nos dio manos, nos dio también en ellas las primeras lecciones del método de calcular” (Condillac 1798, 15). Los signos gestuales, en efecto, desde los tiempos más remotos hasta nuestros días, han constituido un apoyo importante para la práctica matemática elemental. De hecho, todo hace pensar que en la noche de los tiempos, los gestos precedieron a cualquier expresión oral de los números (cf. Ifrah 1997, 64). La mano humana, la herramienta natural por antonomasia, el “instrumento de los instrumentos” como la llamara Aristóteles (cf. *De Anima*, Libro III, 432 a 1-3)¹³, constituye la «máquina de cálculo» primigenia, la «máquina de contar» más simple y natural (cf. Ifrah 1997, 80, 132)¹⁴.

¹¹ Véase *Antropología* §39, Ak. VII 195. El número, como tipo de enlace sintético, supone la unidad de la conciencia, como unidad cualitativa, la cual contiene el fundamento de unidad de los diversos conceptos en los juicios (cf. B 114). El concepto de número consiste en la conciencia de la unidad de la síntesis de ir añadiendo sucesivamente una unidad tras otra. La acción de enlazar una a una las unidades constituye un acto no sensible, producto de la espontaneidad del sujeto cognoscente. En efecto, el número es acto puro de la espontaneidad del entendimiento (*reine Actus der Spontaneität des Verstandes*) (cf. *Carta de Kant a Rehberg*, antes del 25 de septiembre de 1790, Ak. XI 207). En el §15 de la *Deducción trascendental de las categorías* de la segunda edición de la *KrV*, Kant sostiene que el número es un determinado modo de enlace (*Verbindung, conjunctio*) de la multiplicidad dada originariamente en la intuición pura, enlace que nunca nos puede llegar a través de los sentidos ni puede, por tanto, tampoco estar contenido a la vez en la forma pura de la intuición sensible (*reine Form der sinnlichen Anschauung*), por lo cual constituye un acto de la espontaneidad de la fuerza representativa (*Actus der Spontaneität der Vorstellungskraft*), un acto de la autoactividad del sujeto cognoscente (*Actus der Selbstthätigkeit des Subjekts*) (cf. B 129-130).

¹² En su *Essai sur l'origine des connaissances humaines*, publicado por primera vez en 1746, Condillac concede a los gestos un papel protagónico en los debates del siglo XVIII en torno al origen del lenguaje. Argumenta que el lenguaje original surgió de signos naturales, es decir, de gestos (cf. Kendon 2004, 36-37; McNeill 1992, 3). Según Kendon (2004, 37), debido a que se relaciona con la primera forma de expresión lingüística, el gesto es para Condillac de gran interés para comprender las formas de expresión anteriores al lenguaje hablado.

¹³ La naturaleza ha otorgado al hombre la mano, la herramienta más útil con diferencia (*De Anima*, Libro IV, 687 a 20-23). En *Idee zu einer allgemeinen Geschichte in weltbürgerlicher Absicht*, Kant afirma que la naturaleza no dotó al hombre de los cuernos del toro, de las garras del león ni de la dentadura del perro, sino meramente de manos para la invención de sus productos alimenticios, de su cobijo, de su seguridad y defensa exteriores (Ak. VIII 19). Por otra parte, Aristóteles llama la atención también sobre la analogía que a su juicio existe entre el alma y la mano (*De Anima*, Libro III, 432 a 1-3). La mano es polifuncional y su ductilidad es expresión de la inteligencia humana, pues disponemos de dos instrumentos en nosotros mismos con los cuales utilizamos instrumentos externos, a saber: en el cuerpo, la mano y en el alma, el *nous* (cf. *Problemas*, 955 b 23; cf. Aristóteles 1907, 545).

¹⁴ Lakoff y Núñez sostienen que nuestra matemática de cálculo y la notación que usamos es elegida por razones corporales, para facilitar el procesamiento cognitivo y porque tenemos diez dedos y aprendemos a contar con ellos. No usamos notación binaria, como hacen los ordenadores, porque nuestros diez dedos hacen que sea más fácil para nosotros usar la base 10 (cf. Lakoff y Núñez 2001, 86). Algunos pueblos «primitivos» contemporáneos, al no saber «contar» como nosotros y disponer solamente de «nombres de número» para uno, dos y mucho, se refieren a las diversas partes de su cuerpo, recurriendo a los dedos de las manos y los pies, a las articulaciones de los brazos y de las piernas, a los ojos, a la nariz, a la boca, a las orejas, a los senos o al tórax (cf. Ifrah 1997, 58). En esta clase de prácticas, «la simple enumeración de las partes del cuerpo no basta para constituir una verdadera serie aritmética si no va acompañada de la sucesión de gestos correspondientes» (Ifrah 1997, 62).

Ahora bien, como ya se ha mencionado, Kant hace referencia al uso de signos gestuales en la cuenta, en particular a la utilización de los dedos de la mano para sumar, con el fin de ilustrar su tesis de que los juicios aritméticos son sintéticos. En la *Introducción* a la KrV escribe:

El concepto de doce no está en modo alguno ya pensado, sólo porque yo piense aquella unificación de siete y cinco; y por mucho que yo analice mi concepto de una suma posible tal, no encontraré en él el doce. Se debe salir fuera de estos conceptos, procurando el auxilio de la intuición que corresponde a uno de los dos, por ejemplo *los cinco dedos*, o bien (como Segner en su aritmética) cinco puntos, y agregando así, poco a poco, las unidades del cinco dado en la intuición, al concepto de siete. Pues tomo primeramente el número 7 y, tomando como ayuda, como intuición, para el concepto de 5, *los dedos de mi mano*, añadido ahora poco a poco al número 7, en aquella imagen mía, las unidades que antes reuniera para formar el número 5, y veo así surgir el número 12. (B 15-16; las cursivas son mías).

Kant esgrime que el juicio no es analítico, por cuanto lo que se piensa en él, el contenido intensional de $7+5$ como concepto, es la operación que debe realizarse, la instrucción que ha de ejecutarse, no el resultado de su (correcta) aplicación. El contenido que es pensado en el concepto-sujeto de la proposición aritmética es “hay que añadir 7 a 5”, no el 12 que, mediante la realización de la operación, se obtiene como resultado. Como afirma Kant, “...que 7 tenía que ser añadido a 5 ya lo había pensado yo, ciertamente, en el concepto de una suma $= 7 + 5$; pero no que esta suma fuese igual al número 12” (B 16). En consecuencia, la proposición $7+5=12$, como fórmula numérica, ha de interpretarse como denotando y prescribiendo una instrucción de cálculo, como una tarea por hacer¹⁵, y no como un juicio analítico, fundado en una interpretación de la fórmula como proposición categórica de la forma sujeto-predicado, en la que los conceptos son relacionados por el signo “=”, entendido como la cópula es.

En el pasaje anterior Kant equipara los cinco dedos de la mano con cinco puntos, como intuición espacial correspondiente al concepto de número cinco. Kant afirma explícitamente en el *Esquematismo* que los puntos puestos unos después de otros constituyen una imagen del número en cuestión, a saber: ‘....’ (cf. A 140/B 179). El cálculo prescrito en la proposición en cuestión puede realizarse con los dedos de la mano y con ello, al dar expresión corporal a la acción de contar, se exhibe a la vez el significado esencial del número como adición sucesiva de unidades y como comprensión de la unidad de todo el proceso. Contar con los dedos constituye una acción motriz, que involucra tanto la sucesión de cosas consideradas homogéneas como la correspondencia uno a uno entre los dedos y las cosas que se cuentan.

¹⁵ Tal como las tareas que la profesora de primaria pone en la pizarra a los niños pequeños para que practiquen las operaciones aritméticas elementales. En el lado derecho del signo “=”, cuyo significado consiste en el anuncio del resultado, va un espacio en blanco ($7 + 5 =$), de modo que para el estudiante dicha expresión no constituye aún una fórmula numérica que ha de aprender de memoria, ya que no se adjunta en ella la solución de la operación, pues dicho espacio ha de ser rellenado por él mismo.

De este modo, como los gestos son acciones visibles, la mano con los dedos extendidos simultáneamente *ante oculos*, al terminar la cuenta, puede actuar como modelo cardinal del número, haciéndolo «intuitivo»¹⁶. Dicho gesto, con los dedos fijos e inmóviles, puede considerarse la imagen del concepto como número cardinal. Pero, en lugar de reflejar el carácter estático asociado a las imágenes, la acción de contar con los dedos puede considerarse más bien como la representación del proceso dinámico mismo de contar. Este tipo de gesto, por su carácter esencialmente cinético, guarda una analogía más estrecha con la concepción del número defendida por Kant como adición sucesiva de unidades. El movimiento coordinado y regular de los dedos exhibe corporalmente el concepto numérico en la intuición, no ya de manera estática como las rayas o puntos dibujados en el papel, sino dinámica y procesualmente, poniendo ante la vista la generación del número como adición sucesiva de una unidad tras otra. Por eso dice Kant que, al añadir poco a poco al número 7, unidad tras unidad, moviendo secuencialmente los dedos de la mano, ve surgir el número 12 (cf. B 15-16). Además, la exhibición del concepto numérico es *a priori*, porque en el procedimiento sólo se atiende a la acción de construcción del concepto, acción visible ejecutada digitalmente en la que se hace abstracción de todo aquello que no concierne al concepto en cuanto representación universal (cf. A 714/B 742). En efecto, no se atiende a los dedos como tales, sino como unidades homogéneas que han de adicionarse sucesivamente. Los dedos constituyen de este modo símbolos más que imágenes del contar y del número natural.

Sin embargo, aun cuando recurriendo al auxilio de los dedos se exhibe el procedimiento de cálculo numérico elemental ante los ojos, no puede soslayarse que éste es simplemente el punto de partida de la aritmética. Desde hace mucho tiempo se dispone de procedimientos técnicos mejores y más rápidos. La sustitución del procedimiento elemental de contar con los dedos se hace atendiendo a criterios de economía y eficiencia, pero no basándose en la seguridad y la fiabilidad de los nuevos mecanismos. Al respecto Hegel sostiene en la *Ciencia de la lógica*:

Que 7 y 5 hacen doce, se experimenta por el hecho de que a 7 se le añaden numerando [*hinzunumeriert*] aún 5 unos con los dedos o de otro modo, de lo cual es retenido el resultado luego en la memoria, de memoria [*auswendig*]; pues no hay nada interno en ello. Al igual que $7 \times 5 = 35$ se sabe contando con los dedos, etc., en lo que se añade numerando [*hinzunumeriert*] a un siete aún otro [siete], esto se realiza cinco veces, y el resultado es igualmente retenido de memoria. El esfuerzo de este numerar, de la invención de las sumas, productos, es suprimido mediante los unos a unos listos o unos por unos listos, que uno sólo tiene que aprender de memoria. (Hegel 1934, 201).

En efecto, una vez que los resultados están ya disponibles en las fórmulas numéricas, gracias a la escritura, la ejecución de la cuenta se delega a la memoria, así como a la

¹⁶ También los gestos pueden ser dibujados, como sugiere el caso de las manos estampadas en las paredes de cuevas prehistóricas (pintura rupestre). Estos «gestos dibujados» podrían ser el origen de las representaciones más simples usadas en la aritmética para exhibir visualmente números: puntos, rayas, etc. Como afirma Vygotski, «los gestos son escritura en el aire, y los signos escritos suelen ser gestos que han quedado fijados» (Vygotski 2000, 162).

aplicación de técnicas de cálculo y a la manipulación reglada de signos, aunque nunca de manera realmente absoluta. El contar con los dedos es, como sostiene Leibniz, una técnica simple, elemental y lenta, un método de contar propio de campesinos. El calculista, en cambio, y todo aquel escolarizado en nuestra época, tiene a su disposición procedimientos muy superiores y sofisticados. Sin embargo, puntualiza Leibniz:

Es a veces aconsejable atenerse a ese cálculo de campesino y a esta lógica de niños, pues tal como se acepta dinero suelto, sin más, en cambio, se prefiere hacer el recuento de piezas grandes, que a veces son de oro, y, si se tuviera que contar diamantes, de buen grado uno se tomaría el trabajo de contarlos recurriendo a los dedos, pues aunque este método es el peor, sin embargo es el más seguro. A la inversa, cuanto más elevado, artificioso y rápido es un cálculo, tanto más fácil resulta equivocarse. (Carta a Gabriel Wagner, GP VII 520; Leibniz 2003, 416-7).

Por tanto, a pesar de ser el peor método, contar con los dedos, por su simpleza y lentitud, es el procedimiento más seguro. Es el más seguro, por ser más originario y fundamental, y porque de él derivan todos los demás modos de cálculo. Por eso interesa a Kant, como verdadero punto de partida de la aritmética.

IV

La referencia al uso de los dedos para contar, con el fin de mostrar el carácter sintético de los juicios aritméticos elementales, no es una muestra del desconocimiento por parte de Kant de las matemáticas superiores de su tiempo, sino una alusión consciente a un proceso matemático originario. Precisamente por ser el procedimiento de cuenta más básico, manifiesta de manera especialmente clara el carácter activo, productivo, intuitivo (espacio-temporal) y, por tanto, no meramente conceptual, de la construcción de los números naturales.

Al contar con los dedos se exhiben ante la vista los conceptos numéricos mediante el propio cuerpo. Este movimiento gestual, en su origen, no es una pantomima vacía que acompañe al proceso de contar y que simplemente lo externalice, sino que se produce a la par de él, en tiempo real. Esta gestualidad digital es originalmente constitutiva de la acción misma de contar, no algo sobreañadido a ella. Los dedos extendidos y mostrados simultáneamente son un gesto que proporciona una representación estática del número, su imagen espacial. El gesto de levantar y mover los dedos sucesivamente, de manera ordenada y convencional, constituye una representación dinámica y cinética del número. Mediante esta mímica convencional se escenifica *ante oculos* el proceso mismo de contar. Existe, en efecto, una cierta analogía entre el movimiento de los dedos de la mano y la acción meramente esquemática de contar. El contar con los dedos simboliza dicha acción. En cierta medida es una metáfora corporal, un gesto simbólico, del numerar. Constituye así, una representación figurada del procedimiento que da origen a los números enteros.

Un enfoque estrictamente formalista, que conciba los números mediante relaciones meramente conceptuales derivadas de leyes puramente lógicas, no puede captar la riqueza de los conceptos matemáticos en su dimensión esencialmente dinámica, cinética y operacional. Como hemos indicado, la matemática procede para Kant por construcción

de conceptos en la intuición. Y por tal hay que entender, advierte Kant, la exhibición de un concepto mediante la producción autoactiva de una intuición que le corresponde. Las proposiciones aritméticas elementales, interpretadas como juicios analíticos, como estáticas fórmulas numéricas, no pueden reflejar ni revelar la naturaleza esencialmente productiva y autoactiva que la aritmética elemental tiene para Kant, aspectos en los que se funda, en última instancia, como hemos tratado de mostrar, el carácter sintético y *a priori* de sus juicios distintivos.

Bibliografía

- Aristóteles. 2007. *Ética Nicomaquea*. Introducción de T. Martínez Manzano. Traducción y notas de Julio Pallí Bonet. Madrid: Gredos.
- . 1907. *Aristotle De Anima*. Traducción, introducción y notas de R. D. Hicks. Cambridge: Cambridge University Press.
- Caygill, Howard. 1995. *A Kant Dictionary*. Oxford y Cambridge, Massachusetts: Blackwells Publishers Ltd.
- Condillac, Étienne Bonnot de. 1798. *Œuvres de Condillac* (Vol. 23). París: L'Imprimerie de Ch. Houel.
- Dedekind, Richard. 1963. *Essays on the theory of numbers*. Traducción de Wooster Woodruff Beman. Nueva York: Dover.
- . 2006. "¿Qué son y para qué sirven los números?". En *Dios creó los números: Los descubrimientos matemáticos que cambiaron el mundo*, edición comentada por Stephen Hawking, traducción de José Ferreirós, 784-821. Barcelona: Crítica.
- Descartes, R. 1973. *Œuvres de Descartes* (12 vols.). Editadas por Charles Adam y Paul Tannery. París: Librairie Philosophique J. Vrin.
- Frege, Gottlob. 1998. *Die Grundlagen der Arithmetik: Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Hamburgo: Meiner.
- Harris, Roy. 1999. *Signos de escritura*. Traducción de Patricia Willson. Barcelona: Gedisa.
- Hegel, Georg W. F. 1934. *Wissenschaft der Logik (Erster Teil)*. Edición de Georg Lasson. Leipzig: Felix Meiner.
- Ifrah, Georges. 1997. *Historia universal de las cifras*. Varios traductores. Madrid: Espasa Calpe.
- Kant, Immanuel. 1902-1955. *Kants Gesammelte Schriften* (23 vols.). Akademie-Ausgabe. Berlín: Deutschen Akademie der Wissenschaften.
- . 2010. *Crítica de la razón pura*. Edición bilingüe alemán-español por Mario Caimi. México DF: Fondo de Cultura Económica.
- . 2007. *Crítica del Juicio*. Edición de Juan José García Norro y Rogelio Rovira. Traducción de Manuel García Morente. Madrid: Editorial Tecnos.
- . 1991. *Antropología en sentido pragmático*. Traducción de José Gaos. Madrid: Editorial Alianza.

- Kendon, Adam. 2004. *Gesture: Visible Action as Utterance*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Lakoff, George y Núñez, Rafael E. 2001. *Where Mathematics Come from: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Nueva York: Basic Books.
- Leibniz, G. W. 2003. *Escritos Filosóficos*. Edición de Ezequiel de Olaso. Notas de Ezequiel de Olaso y Roberto Torretti. Traducciones de Roberto Torretti, Tomás E. Zwanck y Ezequiel de Olaso. Madrid: Antonio Machado Libros.
- . 1961. *Die philosophische Schriften* (7 vols.). Editados por C.I. Gerhardt. Hildesheim: Olms.
- McNeill, David. 1992. *Hand and mind: what gestures reveal about thought*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Mosterín, Jesús. 2009. *La cultura humana*. Madrid: Espasa.
- Vygotski, Lev. 2000. *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Traducción de Silvia Furió. Barcelona: Crítica.